

## Klub Gimnazjalisty

### Część całkowita liczby rzeczywistej w równaniach

13.11.2006

Elżbieta Jakóbczyk- Pracownia Matematyki Pałacu Młodzieży w  
Katowicach

*Częścią całkowitą liczby rzeczywistej  $x$  nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą od  $x$  i oznaczamy symbolem  $[x]$ .*

#### Przykłady:

$$[7]=7$$

$$[5,2]=5$$

$$[-4]=-4$$

$$[-3,3]=-3$$

#### Własności:

- $[x] \leq x < [x] + 1$
- $0 \leq x - [x] < 1$  (liczbę  $x - [x]$  nazywamy częścią ułamkową liczby i oznaczamy symbolem  $\{x\}$ )
- $x \geq [x] > x - 1$
- $[x] \in \mathbf{Z}$
- Jeśli  $x \in \mathbf{Z}$ , to  $[x] = x$
- Jeśli  $x \leq y$ , to  $[x] \leq [y]$

#### Dowód:

Mamy

$$[x] \leq x \quad (\text{z określenia } [x])$$

a z założenia wiemy, że  $x \leq y$

Zatem

$$[x] \leq y.$$

Lecz  $[y]$  jest największą liczbą całkowitą nie większą od  $y$  czyli

$$[x] \leq [y]$$

- $[x+y] \geq [x] + [y]$

Dowód:

$$\text{Niech } x = [x] + \alpha \quad 0 \leq \alpha < 1$$

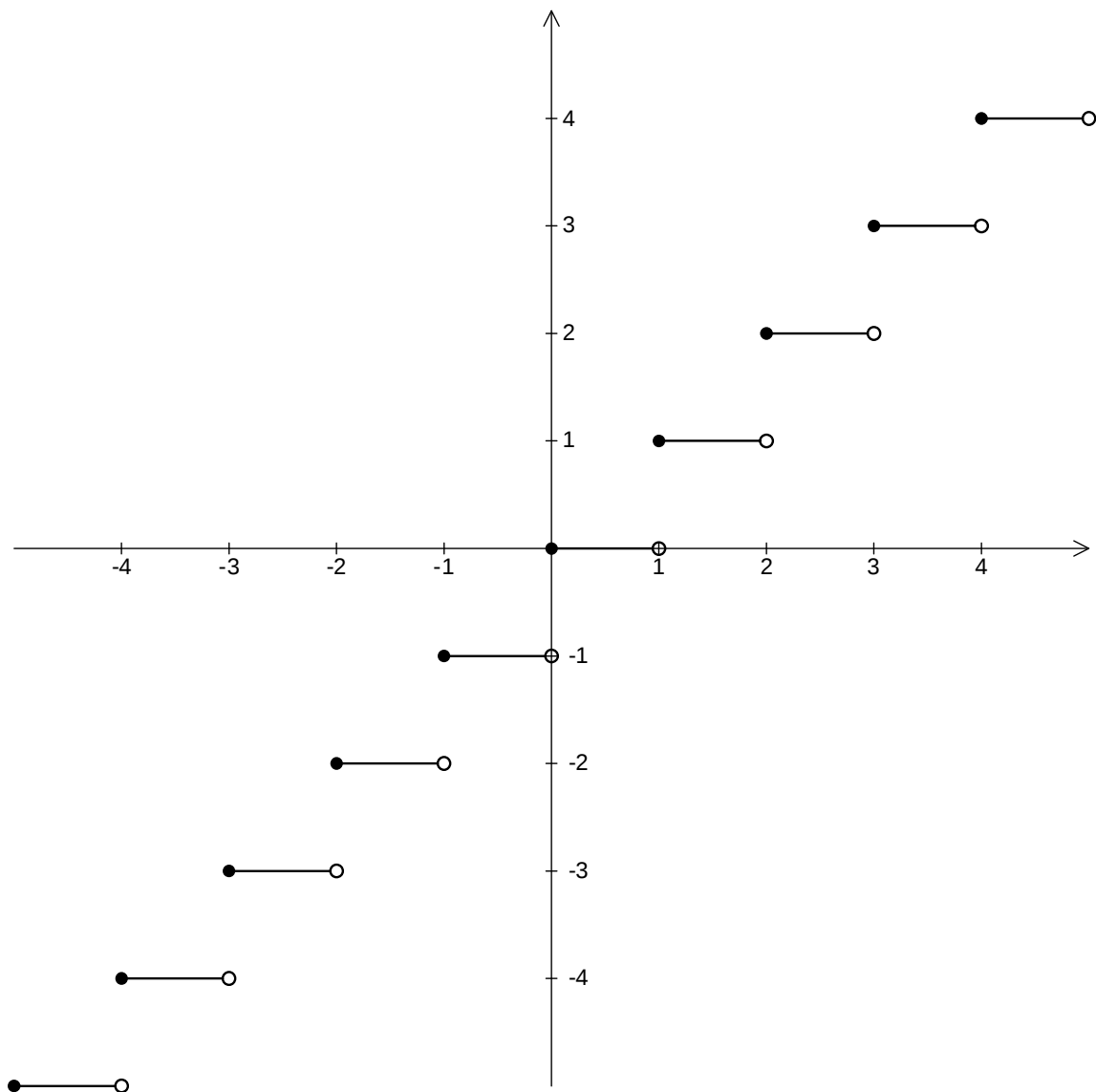
$$y = [y] + \beta \quad 0 \leq \beta < 1$$

Wtedy

$$x + y = [x] + [y] + \alpha + \beta$$

$$[x+y] = \begin{cases} [x] + [y], & \text{gd}y 0 \leq \alpha + \beta < 1 \\ [x] + [y] + 1, & \text{gd}y 1 \leq \alpha + \beta < 2 \end{cases}$$

**Wykres funkcji  $y = [x]$**



**Zadanie 1.** Przy pomocy części całkowitej określ funkcję, która każdej liczbie naturalnej przyporządkowuje resztę z dzielenia przez 5  
Otrzymujemy:

$$f(n) = n - 5\left[\frac{n}{5}\right]$$

**Zadanie 2. Rozwiąż równania :**

$$1) \quad [x] = \frac{9}{10}x + 1$$

Założmy, że  $x$  spełnia powyższe równanie .Oznaczmy

$$[x] = m, \quad \text{gdzie } m \in \mathbf{Z}$$

Z własności mamy:

$$m \leq x < m + 1$$

Ponadto

$$m = \frac{9}{10}x + 1 \quad \text{czyli} \quad x = \frac{10}{9}(m - 1)$$

Otrzymujemy nierówności:

$$m \leq \frac{10}{9}(m - 1) < m + 1$$

$$9m \leq 10m - 10 < 9m + 9$$

$$10 \leq m < 9$$

Ponieważ  $m$  jest liczbą całkowitą, więc  $m \in \{10, 11, 12, \dots, 18\}$

$$\text{Zatem } x \in \left\{10, 11\frac{1}{9}, 12\frac{2}{9}, 13\frac{3}{9}, 14\frac{4}{9}, \dots, 19\frac{8}{9}\right\}$$

Po podstawieniu wyliczonych wartości do wyjściowego równania stwierdzamy, że istotnie są one jego rozwiązaniami

$$2) \quad \left[ \frac{x+1}{3} \right] = \frac{x-1}{2}$$

Postępujemy analogicznie jak powyżej:

$$\left[ \frac{x+1}{3} \right] = m$$

$$m \leq \frac{x+1}{3} < m+1$$

$$3m-1 \leq x < 3m+2$$

$$m = \frac{x-1}{2}, \quad \text{a stąd} \quad x = 2m+1$$

$$3m-1 \leq 2m+1 < 3m+2$$

$$-1 < m \leq 2$$

czyli  $m \in \{0,1,2\}$  a tym samym  $x \in \{1,3,5\}$

$$3) \quad [x] + \left[ x + \frac{1}{2} \right] + \left[ x + \frac{2}{3} \right] = 2006$$

Przyjmijmy, że

$$x = [x] + \alpha$$

Rozważymy przypadki ze względu na  $\alpha$

$$(i) \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{3}$$

wtedy:

$$\left[ x + \frac{1}{2} \right] = [x]$$

$$\left[ x + \frac{2}{3} \right] = [x]$$

czyli równanie ma postać

$$[x] + [x] + [x] = 2006$$

Wtedy równanie nie ma rozwiązań, bo lewa strona jest liczbą całkowitą podzielną przez 3, a prawa nie.

$$(ii) \quad \frac{1}{3} \leq \alpha < \frac{1}{2}$$

wtedy:

$$\left[ x + \frac{1}{2} \right] = [x]$$

$$\left[ x + \frac{2}{3} \right] = [x] + 1$$

czyli równanie ma postać

$$[x] + [x] + [x] + 1 = 2006$$

$$3[x] = 2005$$

Powyższe równie też nie posiada rozwiązań.

$$(iii) \quad \frac{1}{2} \leq \alpha < 1$$

wtedy:

$$\left[ x + \frac{1}{2} \right] = [x] + 1$$

$$\left[ x + \frac{2}{3} \right] = [x] + 1$$

czyli równanie ma postać

$$[x] + [x] + [x] + 2 = 2006$$

$$3[x] = 2004$$

$$[x] = 668$$

Stąd oraz z warunku (iii) otrzymujemy, że rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste należące do przedziału  $< 668\frac{1}{2}, 669)$ .

$$4) \quad 2^{[x^2]} = 3^{[4x-2]}$$

Zauważmy, że powyższe równanie jest spełnione tylko wtedy, gdy

$$[x^2] = 0$$

i

$$[4x-2] = 0$$

a więc

$$1 > x^2 \geq 0$$

i

$$1 > 4x - 2 \geq 0$$

$$x \in (-1, 1)$$

i

$$x \in < \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$$

$$\text{Stąd} \quad x \in < \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$$

5)  $[x] + [1 - x] = 1$

Łatwo sprawdzić, że każda liczba całkowita spełnia równanie. Pokażemy, że jeśli  $x$  nie jest liczbą całkowitą, to nie spełnia równania.

Niech  $x \notin \mathbf{Z}$ . Wtedy  $1 - x \notin \mathbf{Z}$ .

Zatem

$$[x] < x$$

$$[1 - x] < 1 - x$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy

$$[x] + [1 - x] < 1$$

co jest sprzeczne z wyjściowym równaniem.

### Zadanie 3.

Dana jest funkcja  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  określona wzorem:

$$f(n) = n + (-1)^n \left[ \frac{n}{3} \right]$$

**Rozwiąż równania :**

**a)**  $f(n) = 30$       **b)**  $f(n) = 58$       **c)**  $f(n) = 97$

Rozwiązań szukamy wśród liczb naturalnych. Każdą liczbę naturalną  $n$  możemy przedstawić w postaci:

$$n = 6k + m \quad \text{gdzie} \quad m \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Wtedy :

$$f(6k) = 6k + [2k] = 8k$$

$$f(6k + 1) = 6k + 1 - \left[ \frac{6k+1}{3} \right] = 4k + 1$$

$$f(6k + 2) = 6k + 2 + \left[ \frac{6k+2}{3} \right] = 8k + 2$$

$$f(6k + 3) = 6k + 3 - \left[ \frac{6k+3}{3} \right] = 4k + 2$$

$$f(6k + 4) = 6k + 4 + \left[ \frac{6k+4}{3} \right] = 8k + 5$$

$$f(6k + 5) = 6k + 5 - \left[ \frac{6k+5}{3} \right] = 4k + 4$$

Kolejno przyrównujemy prawe strony powyższych przypadków do liczby 30. Okazuje się, że tylko równanie  $4k + 2 = 30$  ma rozwiązanie w zbiorze liczb naturalnych. Otrzymujemy  $k = 7$  czyli  $n = 45$ .

**b)** rozwiązaniami tego równania są liczby 44 , 87

**c)** rozwiązaniem tego równania jest liczba 145.

