

Przykładowe rozwiązania zadań z klasy 4 – PIKOMAT 2010

Zadanie 4 (etap III)

Zastąp litery siedmioma różnymi cyframi od 0 do 6 tak, aby zachodziła podana równość. Jednakowym literom odpowiadają jednakowe cyfry, a różnym – różne.

$$\text{MAT} + \text{MAT} = \text{PIKO}$$

Autor rozwiązania: **Karolina Wilkosz**, Szkoła Podstawowa Nr 22 w Jaworznie

Rozwiązanie:

Aby z sumy liczb (trzycyfrowych), takich samych, utworzyła się liczba czterocyfrowa, to litera **M** jest 5 lub 6. Wtedy litera **P** = 1, a litera **I** jest równa 0, 2 lub 3. Litery **A** i **T** nie mogą być równe 4 i 6. **A** może być równe 2, 3, 5. **T** może być równe tylko 2 lub 3.

Np.

$$\begin{array}{r} \mathbf{M} = 5 \\ \mathbf{A} = 2 \\ \mathbf{T} = 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 523 \\ + 523 \\ \hline 1046 \\ \mathbf{PIKO} \end{array}$$

lub

$$\begin{array}{r} \mathbf{M} = 5 \\ \mathbf{A} = 3 \\ \mathbf{T} = 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 532 \\ + 532 \\ \hline 1064 \\ \mathbf{PIKO} \end{array}$$

lub

$$\begin{array}{r} \mathbf{M} = 6 \\ \mathbf{A} = 5 \\ \mathbf{T} = 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 652 \\ + 652 \\ \hline 1304 \\ \mathbf{PIKO} \end{array}$$

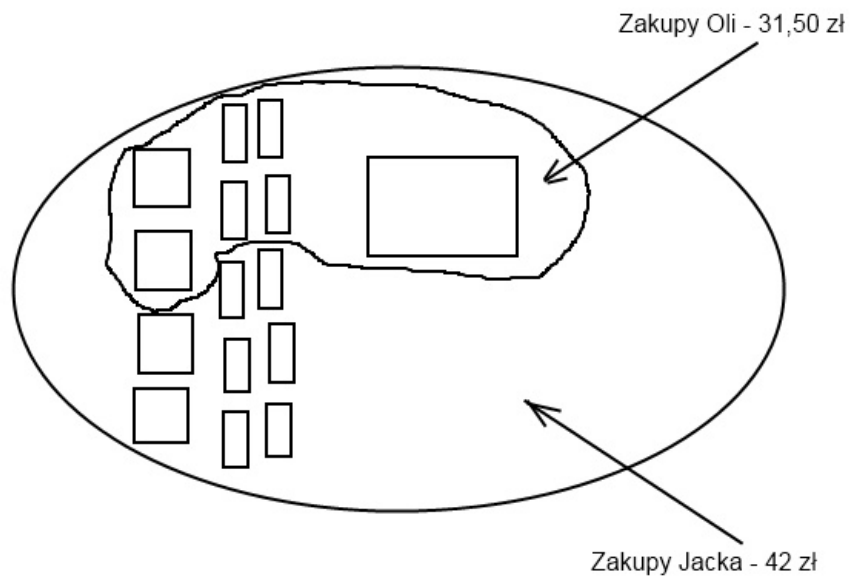
Odp.: Mamy trzy rozwiązania.

Zadanie 1 (etap III)

Ola, Jacek i Paweł kupowali jednakowe książki, zeszyty i gumki. Ola za 2 książki, 4 zeszyty i jedną gumkę zapłaciła 31 zł 50 gr. Jacek kupił 4 książki, 10 zeszytów i jedną gumkę za kwotę 42 zł. Ile zł zapłacił Paweł, który kupił 1 książkę, 1 zeszyt i 1 gumkę?

Autor rozwiązania: **Przemysław Szczotka**, Szkoła Podstawowa w Żabnicy

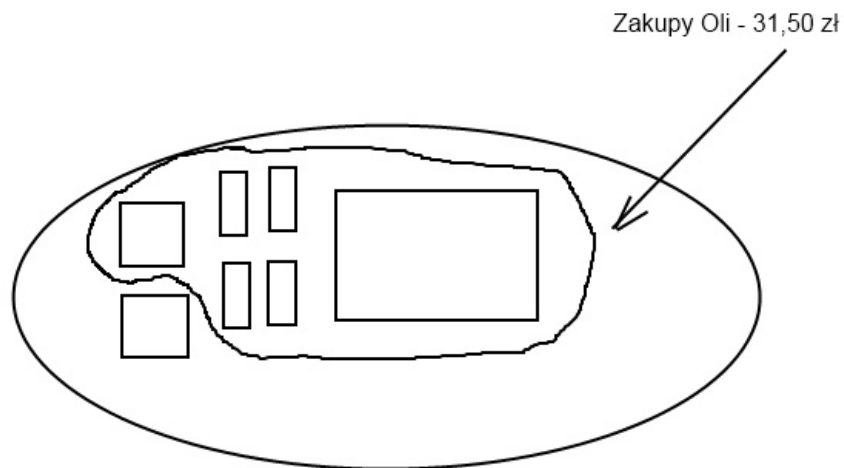
Rozwiązanie:



$$42 \text{ zł} - 31,50 \text{ zł} = 10,50 \text{ zł}$$

$$10,50 \text{ zł} : 2 = 5,25 \text{ zł}$$

5,25 zł – koszt 1 książki i 3 zeszytów



$$k + z + g = 31,50 \text{ zł} - 5,25 \text{ zł} = 26,75 \text{ zł}$$

Odp.: Paweł zapłacił 26 zł 75 gr.

Przykładowe rozwiązania zadań z klasy 5 – PIKOMAT 2010

Zadanie 1 (etap I)

Ania dostała od Oli trzy kartki z cyframi, z których ułożyła dwie liczby trzycyfrowe: najpierw największą, a później drugą co do wielkości. Ola zauważyła, że suma liczb ułożonych przez Anię wynosi 1233. Jakie cyfry były na kartkach, które dostała Ania?

Autor rozwiązania: **Julia Czerwińska**, Szkoła Podstawowa w Zespole Szkolno-Gimnazjalnym w Nędzy

Rozwiązanie:

Założmy, że litery A, B, C oznaczają cyfry umieszczone na trzech kartkach Oli, wtedy układając z nich liczby trzycyfrowe otrzymujemy sześć takich liczb: **ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA**.

- Gdyby największą z cyfr była A, wtedy największą liczbą byłyby ABC lub ACB, a drugą co do wielkości ACB lub ABC.
- Gdyby największą z cyfr była B, wtedy największą liczbą byłyby BAC lub BCA, a drugą co do wielkości BCA lub BAC.
- Gdyby największą z cyfr była C, wtedy największą liczbą byłyby CAB lub ACB, a drugą co do wielkości CBA lub CAB.

Z powyższych przypadków wynika fakt, że największa i druga co do wielkości liczba będą miały tę samą cyfrę setek. Do dalszych rozważań przyjmę, że $A > B > C$, czyli rozpatruję liczby:

$$ABC = 100A + 10B + C \text{ (jako największą)}$$

oraz

$$ACB = 100A + 10C + B \text{ (jako drugą co do wielkości).}$$

Wtedy suma liczb ABC i ACB wynosi: $200A + 11B + 11C$, co wynika z treści zadania. Będę teraz szukać cyfr, które spełniają następujący warunek:

$$200A + 11(B + C) = 1233,$$

gdzie A należy do zbioru $\{2,3,4,5,6\}$; zgodnie z założeniem $A > B > C$.

1) Niech $A = 2$, wtedy $400 + 11(B + C) = 1233$

$11(B + C) = 833$, co jest niemożliwe, bo 11 nie dzieli 833.

2) Niech $A = 3$, wtedy $600 + 11(B + C) = 1233$

$11(B + C) = 633$, co jest niemożliwe, bo 11 nie dzieli 633.

3) Niech $A = 4$, wtedy $800 + 11(B + C) = 433$

$11(B + C) = 433$, co jest niemożliwe, bo 11 nie dzieli 433.

4) Niech $A = 5$, wtedy $1000 + 11(B + C) = 1233$

$11(B + C) = 233$, co jest niemożliwe, bo 11 nie dzieli 233.

5) Niech $A = 6$, wtedy $1200 + 11(B + C) = 1233$

$11(B + C) = 33$, czyli $B + C = 3$, więc $B = 2$ i $C = 1$ lub $B = 3$ i $C = 0$.

Otrzymuję więc dwie pary liczb: 621 i 612 oraz 630 i 603, których suma wynosi 1233 i spełniają pozostałe warunki zadania. Ola posiadała więc karki z cyframi 6, 2, 1 lub 6, 3, 0.

Przyjęcie założeń, że B lub C jest największą z cyfr daje takie samo rozwiązanie co do cyfr na karteczkach.

Odp.: Na kartkach, które dostała Ania były cyfry 6, 2, 1 lub 6, 3, 0.

Autor rozwiązania: **Krzysztof Łukowicz**, Szkoła Podstawowa Nr 40 w Tychach

Rozwiązanie:

Dane do zadania:

- trzy kartki z cyframi,

- z tych kartek ułożono trzy liczby 3 cyfrowe: najpierw największa a potem druga co do wielkości,
- suma tych liczb jest równa 1233.

Ania z trzech cyfr napisanych na kartkach ma ułożyć największą liczbę trzycyfrową i drugą co do wielkości. Suma tych liczb jest równa 1233. Przy takich warunkach zadania liczbę drugą co do wielkości ułożymy wtedy, gdy zamienimy miejscami cyfrę jedności z cyfrą dziesiątek. W związku z powyższym cyfrą setek musi być cyfra 6.

$$1200 : 2 = 600$$

Liczbę 33 możemy otrzymać na dwa sposoby przy sumowaniu dwóch liczb dwucyfrowych (druga liczba powstaje z zamiany miejsc cyfry jedności i dziesiątek):

$$12 + 21 = 33 \text{ lub } 30 + 03 = 33.$$

Stąd zadanie ma dwa rozwiązania.

Sprawdzenie:

$$621 + 612 = 1233 \text{ oraz } 630 + 603 = 1233.$$

Odp.: Na kartkach, które dostała Ania były cyfry: 6, 2, 1 lub 6, 3, 0.

Zadanie 1 (etap II)

Czy jest taki prostokąt, którego długości boków są liczbami całkowitymi i dla którego długość obwodu wyraża się taką samą liczbą całkowitą co pole powierzchni?

Autor rozwiązania: **Tomasz Kubik**, Szkoła Podstawowa Nr 40 w Tychach

Rozwiązanie:

Dane:

$$\text{Obwód prostokąta: } Ob = 2(a + b)$$

$$\text{Pole prostokąta: } P = a \cdot b$$

$$P = Ob$$

Rozwiązanie:

Boki prostokąta a i b muszą spełniać warunek:

$$a \cdot b = 2a + 2b$$

$$a \cdot b - 2a - 2b = 0$$

$$a \cdot b - 2a - 2b + 4 - 4 = 0 \quad (\text{dodaję i odejmuję } 4 \text{ z lewej strony równania, później mi się to przyda})$$

$$a(b - 2) - 2(b - 2) - 4 = 0 \quad (\text{wyciągam przed nawias wspólny czynnik } (b - 2))$$

$$(b - 2)(a - 2) = 4$$

Znajduję dla jakich dwóch liczb całkowitych iloczyn równa się 4.

Mamy: $1 \cdot 4 = 4$ oraz $2 \cdot 2 = 4$,
czyli

$$b - 2 = 1, \text{ to } b = 1 + 2 = 3,$$
$$a - 2 = 4, \text{ to } a = 2 + 4 = 6,$$

lub

$$b - 2 = 2, \text{ to } b = 2 + 2 = 4$$
$$a - 2 = 2, \text{ to } a = 2 + 2 = 4$$

Rozwiązaniem są 2 prostokąty (z których jeden jest kwadratem) o bokach 3 i 6 lub 4 i 4.

Sprawdzenie:

$$P = Ob$$

Dla boków $a = 6$ i $b = 3$ mamy: $6 \cdot 3 = 2 \cdot (6 + 3)$; $18 = 18$.

Dla boków $a = 4$ i $b = 4$ mamy: $4 \cdot 4 = 2 \cdot (4 + 4)$; $16 = 16$.

Odp.: Rozwiązaniem są 2 prostokąty (z których jeden jest kwadratem) o bokach 3 i 6 lub 4 i 4.

Zadanie 4 (etap III)

Bartek ma 9 jednakowych puzzli w kształcie trójkąta równobocznego ponumerowanych od 1 do 9. Postanowił ułożyć z wszystkich puzzli trójkąt równoboczny tak, aby suma numerów w każdym z małych trójkątów narożnych, składających się z 4 puzzli, była jednakowa. Jak ma to zrobić?

Autor rozwiązania: **Krzysztof Łukowicz**, Szkoła Podstawowa Nr 40 w Tychach

Rozwiązanie:

Poszczególne puzzle oznaczę literami a, b, c, d, f, g, h, i, które będą na razie zastępowały liczby od 1 do 9. Jeżeli ułożymy trójkąt z tych puzzli, to zgodnie z treścią zadania muszą zachodzić następujące równości:

$$a + b + c + g = S$$

$$c + d + e + f = S$$

$$g + h + f + i = S, \text{ gdzie } S \text{ oznacza pewną sumę.}$$

Jeśli doda się te trzy sumy stronami, to otrzymamy następującą równość:

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + c + f + g = 3S$$

Suma pierwszych dziewięciu składników, to liczby od 1 do 9, czyli 45. Równanie ma zatem następującą postać:

$$45 + c + f + g = 3S$$

Przekształcając otrzymamy następującą zależność:

$$c + f + g = 3S - 45, \text{ czyli } c + f + g = 3(S - 45)$$

Z otrzymanej równości wynika, że suma $c + f + g$ jest podzielna przez 3, wtedy są możliwe następujące przypadki:

- Każda z szukanych liczb jest podzielna przez 3 i wtedy istnieje jedna taka trójka: 3, 6, 9.
- Pierwsza z tych liczb jest podzielna przez 3, druga przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, a trzecia resztę 2; wtedy takich trójek jest dużo więcej. Jeżeli wszystkie liczby od 1 do 9 pogrupuje się według reszt z dzielenia przez 3, to przedstawia się to następująco:

Reszta „1” z dzielenia przez 3	1	4	7
Reszta „2” z dzielenia przez 3	2	5	8
Reszta „3” z dzielenia przez 3	3	6	9

Wybierając teraz trójki spełniające opisany warunek otrzymamy następujące zestawy liczb:

- a) (1, 2, 3); (1, 2, 6); (1, 2, 9); (1, 5, 3); (1, 5, 6); (1, 5, 9); (1, 8, 3); (1, 8, 6); (1, 8, 9);
 b) (4, 2, 3); (4, 2, 6); (4, 2, 9); (4, 5, 3); (4, 5, 6); (4, 5, 9); (4, 8, 3); (4, 8, 6); (4, 8, 9);
 c) (7, 2, 3); (7, 2, 6); (7, 2, 9); (7, 5, 3); (7, 5, 6); (7, 5, 9); (7, 8, 3); (7, 8, 6); (7, 8, 9).

Dla ułatwienia przyjmuję, że pierwsza liczba z trójki to c, druga – f, a trzecia – g. Znając te liczby można wyliczyć wartości sum S, bo skoro:

$$45 + c + f + g = 3S, \text{ to } S = (45 + c + f + g) : 3$$

Na podstawie znalezionych c, f, g policzę teraz wszystkie możliwe sumy:

(c, f, g)	Suma c + f + g	Suma S
(1, 2, 3)	6	17
(1, 2, 6); (1, 5, 3); (4, 2, 3)	9	18
(1, 2, 9); (1, 5, 6); (1, 8, 3); (4, 2, 6); (4, 5, 3); (7, 2, 3)	15	20
(1, 5, 9); (1, 8, 6); (4, 2, 9); (4, 5, 6); (4, 8, 3); (7, 2, 6); (7, 5, 3)	15	20
(1, 8, 9); (4, 5, 9); (4, 8, 6); (7, 2, 9); (7, 5, 6); (3, 6, 9)	18	21
(4, 8, 9); (7, 5, 9); (7, 8, 6)	21	22
(7, 8, 9)	24	23

Spośród otrzymanych trójek wybiorę sobie kilka z nich i wykorzystując wcześniejsze równości:

$$a + b + c + g = S,$$

$$c + d + e + f = S,$$

$$g + h + f + i = S.$$

Policzę wartości odpowiadające pozostałym literą i uzupełnię trójkąty.

- **Wybieram trójkę (1, 2, 3)**, wtedy:

$$a + b + 1 + 3 = 17, \text{ czyli } a + b = 13,$$

$$1 + d + e + 2 = 17, \text{ czyli } d + e = 14,$$

$$3 + h + 2 + i = 17, \text{ czyli } h + i = 12,$$

stąd $a = 7, b = 6, d = 9, e = 5, h = 8, i = 4$ lub $a = 6, b = 7, d = 9, e = 5, h = 8, i = 4$.

Po sprawdzeniu sum otrzymuję:

$$6 + 7 + 1 + 3 = 17$$

$$1 + 5 + 9 + 2 = 17$$

$$3 + 4 + 2 + 8 = 17$$

- **Wybieram trójkę (4, 5, 6)**, wtedy:

$$a + b + 4 + 6 = 20, \text{ czyli } a + b = 10,$$

$$4 + d + e + 5 = 20, \text{ czyli } d + e = 11,$$

$$6 + h + 5 + i = 20, \text{ czyli } h + i = 9,$$

stąd $a = 9, b = 1, d = 8, e = 3, h = 7, i = 2$ lub $a = 1, b = 9, d = 3, e = 8, h = 2, i = 7$.

Po sprawdzeniu otrzymuję:

$$9 + 1 + 4 + 6 = 20$$

$$4 + 8 + 3 + 5 = 20$$

$$6 + 7 + 5 + 2 = 20$$

- **Wymieram trójkę (7, 8, 9)**, wtedy:

$$a + b + 7 + 9 = 23, \text{ czyli } a + b = 7,$$

$$7 + d + e + 8 = 23, \text{ czyli } d + e = 8,$$

$$9 + h + 8 + i = 23, \text{ czyli } h + i = 6,$$

stąd $a = 4, b = 3, d = 6, e = 2, h = 1, i = 5$ lub $a = 3, b = 4, d = 2, e = 6, h = 5, i = 1$.

Po sprawdzeniu sum otrzymuję:

$$4 + 3 + 7 + 9 = 23$$

$$7 + 6 + 2 + 8 = 23$$

$$9 + 1 + 8 + 5 = 23$$

Można otrzymać jeszcze dodatkowe układy liczb, jeżeli w wybranej trójce (c, f, g) zmieni się kolejność, a jest to możliwe na 6 sposobów.

Przykładowe rozwiązania zadań z klasy 6 – PIKOMAT 2009

Zadanie 3 (etap I)

Przed kasą biletową utworzyła się 23-osobowa kolejka. Wiedząc, że czas obsługi jednego klienta wynosi 30 sekund, zaś co 1,5 minuty dochodzi jedna osoba, oblicz, po jakim czasie zniknie kolejka i ile osób stało w kolejce?

Autor rozwiązania: **Wojciech Matusiak**, Szkoła Podstawowa Nr 51 w Katowicach

Rozwiązanie:

Skoro czas obsługi jednej osoby trwa 0,5 minuty, a co 1,5 minuty przybywa kolejna osoba, mogę podzielić całe zadanie na tury półtoraminutowe. W każdej turze obsłużone są 3 osoby, dochodzi 1, więc w każdej turze kolejka skraca się o 2 osoby. Jednocześnie każdą turą zwiększa się o 1 osobę ilość osób, którą musi obsłużyć kasjerka.

Rysuję tabelę, w której przedstawiam sytuację po kolejnych 1,5 minutowych turach.

Numer tury	Aktualna liczba osób w kolejce	Ogólna liczba osób w kolejce	Całkowity czas trwania w minutach
1	21	24	1,5
2	19	25	3
3	17	26	4,5
4	15	27	6
5	13	28	7,5
6	11	29	9
7	9	30	10,5
8	7	31	12
9	5	32	13,5
10	3	33	15
11	1	34	16,5
12	0	34	17

Widzę więc, że po zakończeniu jedenastej półtoraminutowej tury, czyli po 16,5 minutach w kolejce została jedna osoba, która po kolejnych 30 sekundach odejdzie od kasy. Zatem kolejka „zniknie” po 17 minutach, a kasjerka obsłuży w tym czasie 34 osoby.

Odp.: Kolejka „zniknie” po 17 minutach, a kasjerka obsłuży w tym czasie 34 osoby.

Zadanie 1 (etap II)

Na zajęciach koła matematycznego Marek zbudował model prostopadłościanu z klocków o wymiarach $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 2\text{ cm}$. Taki sam model ułożył Janek z klocków o wymiarach $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 3\text{ cm}$, jednakże do jego zbudowania użył o 50 klocków mniej niż Marek. Wspaniałego odkrycia dokonał kolega Marka i Janka – Józek, który zbudował identyczny model z klocków o wymiarach $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Z ilu klocków składa się model prostopadłościanu zbudowany przez Józka?

Autor rozwiązania: **Marta Łopyta**, Szkoła Podstawowa Nr 41 w Gliwicach

Rozwiązanie:

Podane w zadaniu informacje o prostopadłościanach zbudowanych przez Marka, Janka i Józka zapisuję w tabelce:

Uczeń	Objętość klocka	Liczba klocków zużyta do zbudowania prostopadłościanu	Objętość prostopadłościanu [cm^3]
Marek	$1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 2\text{ cm} = 2\text{ cm}^3$	$x + 50$	$(x + 50) \times 2$
Janek	$1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 3\text{ cm} = 3\text{ cm}^3$	x	$x \times 3$
Józek	$1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 4\text{ cm} = 4\text{ cm}^3$	z	$z \times 4$

$$3x = 2 \cdot (x + 50)$$

$$x = 100 \text{ [sztuk]}$$

zużył o 3 dni więcej niż rycerz Mścislaw, który przebywał dziennie o 12 wiorst więcej niż jego giermek. Ile dni potrzebował każdy z nich na przebycie tej drogi?

Autor rozwiązania: **Krzysztof Marczyński**, – Gimnazjum Nr 1 w Lesznie

Rozwiązanie:

Dane:

Giermek Maciuś na przebycie drogi 520 wiorst zużył o 3 dni więcej niż rycerz Mścislaw, który przebywał dziennie o 12 wiorst więcej niż jego giermek.

Szukane:

Ile dni potrzebował każdy z nich na przebycie tej drogi?

I sposób

- 1) Szukam dzielników liczby 520.

Rozkład liczby 520 na czynniki pierwsze:	Iloczyny przedstawiają się następująco:
$\begin{array}{r l} 520 & 2 \\ 260 & 2 \\ 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{aligned} 520 &= 2 \cdot 260 \\ 520 &= 4 \cdot 130 \\ 520 &= 8 \cdot 65 \\ \mathbf{520} &= \mathbf{10 \cdot 52} \\ \mathbf{520} &= \mathbf{13 \cdot 40} \\ 520 &= 26 \cdot 20 \end{aligned}$

Ponieważ z warunków zadania wynika, że giermek Maciuś potrzebował 3 dni więcej, a rycerz Mścislaw pokonywał dziennie o 12 wiorst więcej, więc poniższy rozkład daje odpowiedź na postawiony problem:

$$\mathbf{520 = 10 \cdot 52}$$

$$\mathbf{520 = 13 \cdot 40}$$

Tylko te zależności spełniają warunki zadania: jeśli 10 i 13 to dni podróży (różnica 3 dni), a 40 i 52 to wiorsty, jakie pokonywali dziennie (różnica 12 wiorst) – otrzymuję odpowiedź:

Giermek Maciuś wędrował 13 dni, pokonując dziennie 40 wiorst, a rycerz Mścislaw wędrował 10 dni pokonując dziennie 52 wiorsty.

II sposób

- 2) Z warunków zadania zauważam, że podróż musiała trwać co najmniej 4 dni (ponieważ giermek zużył na podróż o 3 dni więcej), więc obliczam, ile maksymalnie wiorst rycerz mógł przebywać dziennie:

$$520 : 4 = 130.$$

- 3) Na podstawie powyższych obliczeń szukam zależności pomiędzy dzielnikami liczby 520 (12 wiorst różnicy między pokonywaną dzienną odległością). Aby otrzymać poprawny wynik poszukuję liczb, które znajdują się równocześnie w obu rzędach:

$13 \cdot 5 \cdot 2 = 130$	$130 - 12 = 118$
$13 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 104$	$104 - 12 = 92$
	$104 + 12 = 116$
$13 \cdot 5 = 65$	$65 - 12 = 53$
	$65 + 12 = 77$
<u>$13 \cdot 2 \cdot 2 = 104$</u>	<u>$52 - 12 = 40$</u>
	$52 + 12 = 64$
<u>$5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 52$</u>	<u>$40 + 12 = 52$</u>
	$40 - 12 = 28$
$13 \cdot 2 = 26$	$26 - 12 = 14$

Wniosek!

Giermek Maciuś na przebycie tej drogi potrzebował 13 dni, a rycerz Mściśław potrzebował 10 dni.

III sposób

Wprowadzam oznaczenia:

x – liczba wiorst przejechanych dziennie przez giermka Maciusia,
 $x + 12$ – liczba wiorst przejechanych dziennie przez rycerza Mściśława,
 d – liczba dni podróży rycerza Mściśława,
 $d + 3$ – liczba dni podróży giermka Maciusia.

1) Obliczam x z proporcjonalności odwrotnej.

Uzasadnienie:

Rycerz Mściśław w określonym czasie pokonywał dłuższą trasę (o 12 wiorst), a giermek Maciuś pokonywał mniej wiorst w czasie dłuższym o 3 dni.

Układam proporcję:

$$\begin{array}{ccc} x \text{ [wiorst]} & \text{-----} & d + 3 \text{ [dni]} \\ \downarrow x + 12 \text{ [wiorst]} & \text{-----} & d \text{ [dni]} \quad \uparrow \end{array}$$

Uwaga: W obliczeniach pomijam jednostki.

$$\begin{aligned} x(d + 3) &= (x + 12)d \\ xd + 3x &= dx + 12d \\ 3x &= 12d \quad /: 3 \\ x &= 4d \quad (**) \end{aligned}$$

Całkowita droga ma długość 520 wiorst. Obliczam liczbę dni podróży rycerza, a następnie giermka.

$$\frac{520}{x} = d + 3$$

$$\frac{520}{4d} = d + 3 \quad / \cdot 4d$$

$$520 = 4d^2 + 12d$$

$$4d^2 + 12d - 520 = 0 \quad /: 4$$

$$d^2 + 3d - 130 = 0$$

- 2) Rozwiązuję równanie kwadratowe (równanie kwadratowe poznałem na dodatkowych zajęciach – realizuję indywidualny program nauczania matematyki).

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-130)$$

$$\Delta = 9 + 520$$

$$\Delta = 529$$

$$\sqrt{\Delta} = 23$$

$$d_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$d_{1/2} = \frac{-3 \pm 23}{2} = \begin{cases} d_1 = -13 \\ d_2 = 10 \end{cases}$$

$d_1 = -13$ nie spełnia warunków zadania, ponieważ liczba dni musi być liczbą naturalną.
 $d_2 = 10$, stąd $d = 10$, a $d + 3 = 13$.

Wniosek!

Rycerz Mścisław podróżował 10 dni, a jego giermek Maciuś 13 dni.

- 3) Obliczam, ile wiorst dziennie pokonał każdy z nich (x i $x + 12$).

$$x = 4d$$

$$x = 40 \text{ [wiorst]}$$

$$x + 12 = 52 \text{ [wiorsty]}$$

Sprawdzenie:

Giermek Maciuś: 40 wiorst dziennie \cdot 13 dni = 520 wiorst.

Rycerz Mścisław: 52 wiorsty dziennie \cdot 10 dni = 520 wiorst.

Odp.: Rycerz Mścisław na przebycie tej drogi potrzebował 10 dni, a giermek Maciuś 13 dni.

IV sposób

	Dni wędrówki	Wiorsty pokonywane dziennie	Odległość
Giermek Maciuś	$d + 3$	x	$(d + 3) \cdot x = 520$
Rycerz Mścisław	d	$x + 12$	$d \cdot (x + 12) = 520$

Jak w poprzednim sposobie rozwiązuję zadanie wykorzystując zależności z proporcjonalności odwrotnej.

$$(d + 3) \cdot x = 520$$

$$d \cdot (x + 12) = 520$$

$$(d + 3) \cdot x = d \cdot (x + 12)$$

↓

$$x = 4d$$

Mamy zatem: $(d + 3) \cdot 4d = 520$, a stąd $(d + 3) \cdot d = 130$.

Teraz rozkładam liczbę 130 na czynniki, ponieważ jest ona iloczynem dwóch liczb: d i $d + 3$:

$$130 = 2 \cdot 65$$

$$130 = 5 \cdot 26$$

$130 = 10 \cdot 13$ – ten rozkład odpowiada warunkom zadania (3 dni różnicy w podróży).

Wniosek!

Rycerz Mściśław wędrował 10 dni pokonując 52 wiorsty dziennie.

Giermek Maciuś wędrował 13 dni pokonując 40 wiorst dziennie.

Sprawdzenie:

$$520 : 10 = 52 \text{ [wiorsty dziennie]}$$

$$520 : 13 = 40 \text{ [wiorsty dziennie]}$$

Odp.: Rycerz Mściśław na przebycie tej drogi potrzebował 10 dni, a giermek Maciuś 13 dni.

Zadanie 1 (etap II)

Jakub ciągle prowadzi jakieś obserwacje w pobliżu swego miejsca zamieszkania. Oto zapiski

ostatnich obserwacji Jakuba: „Pociąg osobowy w czasie $\frac{1}{4}$ minuty przejeżdża odległość

równą swojej długości, a czasie 50 sekund przejeżdża przez wiadukt o długości 0,7 km”. Jaka średnią prędkość miał pociąg opisany przez Jakuba oraz jaka była jego długość?

Autor rozwiązania: **Kamil Janas**, Publiczne Gimnazjum w Zespole Szkół SRAK w Chorzowie

Rozwiązanie:

Jeżeli czas przejazdu pociągu przez wiadukt oznacza czas liczony od momentu, gdy lokomotywa (początek pociągu) wjeżdża na wiadukt do czasu, gdy ostatni wagon (koniec pociągu) zjeżdża z wiaduktu, wtedy pokonanie odległości równej długości wiaduktu przez dowolny ustalony punkt pociągu, np. jego początek, zajmie czas równy różnicy czasu potrzebnego na przejazd przez wiadukt i czasu przejazdu odległości równej długości pociągu. Czas ten jest równy:

$$t = 50 \text{ s} - 15 \text{ s} = 35 \text{ s}.$$

Średnia prędkość pociągu jest wtedy równa:

$$v = s : t = 700 \text{ m} : 35 \text{ s} = 20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/h},$$

gdzie s oznacza długość wiaduktu.

Długość l pociągu jest wtedy równa:

$$l = v \cdot t' = 20 \text{ m/s} \cdot 15 \text{ s} = 300 \text{ m},$$

gdzie t' oznacza czas przejazdu przez pociąg odległości równej swojej długości.

Jeżeli czas przejazdu pociągu przez wiadukt oznacza, według Jakuba, czas liczony od momentu, gdy lokomotywa (początek pociągu) wjeżdża na wiadukt do czasu, gdy ta lokomotywa (początek pociągu) dojeżdża do końca wiaduktu, wtedy pokonanie odległości równej długości wiaduktu przez dowolny ustalony punkt pociągu, np. jego początek, zajmie czas równy: $t_l = 50 \text{ s}$ i średnia prędkość pociągu wynosi:

$$v_I = s : t_I = 700 \text{ m} : 50 \text{ s} = 14 \text{ m/s} = \mathbf{50,4 \text{ km/h}}.$$

Długość pociągu jest wtedy równa:

$$l_I = v_I \cdot t' = 14 \text{ m/s} \cdot 15 \text{ s} = \mathbf{210 \text{ m}}.$$

Odp.: W zależności od interpretacji treści zadania średnia prędkość pociągu opisanego przez Jakuba wynosiła 72 km/h lub 50,4 km/h, a jego długość odpowiednio 300 m lub 210 m.

Zadanie 3 (etap III)

Kuba napisał na kartce liczbę, która ma ciekawą własność, a mianowicie: jeśli liczbę dwucyfrową otrzymaną z liczby trzycyfrowej przez opuszczenie cyfry setek pomnożymy przez pewną liczbę naturalną, to otrzymamy daną liczbę trzycyfrową. Jaka liczbę napisał na kartce Kuba? Odpowiedź uzasadnij.

Autor rozwiązania: **Kamil Janas**, Publiczne Gimnazjum w Zespole Szkół SRAK w Chorzowie

Rozwiązanie:

Jeśli przyjmiemy oznaczenia:

k – liczba napisana przez Kubę,

s – cyfra setek w liczbie k,

d – liczba otrzymana poprzez opuszczenie liczby setek w liczbie k,

n – liczba naturalna, która pomnożona przez d daje k,

to $k = 100 \cdot s + d = d \cdot n,$

więc $100 \cdot s = d \cdot n - d,$

czyli $\mathbf{100 \cdot s = d \cdot (n - 1)}.$

Wynika z tego, że liczbę $d \cdot (n - 1)$ można uzyskać jako iloczyn czynników pierwszych liczby $100 \cdot s$. Uwzględniając fakt, że liczba d jest dwucyfrowa, liczba $d \cdot (n - 1)$ może być równa:

1) $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 10 \cdot 10 = 20 \cdot 5 = 25 \cdot 4 = 50 \cdot 2,$

stąd d może być równe: 10, 20, 25 lub 50, a k jest wtedy równe: 110, 120, 125 lub 150,

albo

2) $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 10 \cdot 20 = 20 \cdot 10 = 25 \cdot 8 = 40 \cdot 5 = 50 \cdot 4,$

stąd d może być równe: 10, 20, 25, 40 lub 50, a k jest wtedy równe: 210, 220, 225, 240 lub 250,

albo

3) $300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 10 \cdot 30 = 12 \cdot 25 = 15 \cdot 20 = 20 \cdot 15 = 25 \cdot 12 = 30 \cdot 10 = 50 \cdot 6 =$
 $= 60 \cdot 5 = 75 \cdot 4,$

stąd d może być równe: 10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 60 lub 75, a k jest wtedy równe: 310, 312, 315, 320, 325, 330, 350, 360 lub 375,

albo

$$4) 400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 10 \cdot 40 = 16 \cdot 25 = 20 \cdot 20 = 25 \cdot 16 = 40 \cdot 10 = 50 \cdot 8 = 80 \cdot 5,$$

stąd d może być równe: 10, 16, 20, 25, 40, 50 lub 80, a k jest wtedy równe: 410, 416, 420, 425, 440, 450 lub 480,

albo

$$5) 500 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 10 \cdot 50 = 20 \cdot 25 = 25 \cdot 20 = 50 \cdot 10,$$

stąd d może być równe: 10, 20, 25 lub 50, a k jest wtedy równe: 510, 520, 525 lub 550,

albo

$$6) 600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 10 \cdot 60 = 12 \cdot 50 = 15 \cdot 40 = 20 \cdot 30 = 24 \cdot 25 = 25 \cdot 24 = 30 \cdot 20 = 40 \cdot 15 = 50 \cdot 12 = 60 \cdot 10 = 75 \cdot 8,$$

stąd d może być równe: 10, 12, 15, 20, 24, 25, 30, 40, 50, 60 lub 75, a k jest wtedy równe: 610, 612, 615, 620, 624, 625, 630, 640, 650, 660 lub 675,

albo

$$7) 700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 10 \cdot 70 = 14 \cdot 50 = 20 \cdot 35 = 25 \cdot 28 = 28 \cdot 25 = 35 \cdot 20 = 50 \cdot 14 = 70 \cdot 10,$$

stąd d może być równe: 10, 14, 20, 25, 28, 35, 50 lub 70, a k jest wtedy równe: 710, 714, 720, 725, 728, 735, 750 lub 770,

albo

$$8) 800 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 10 \cdot 80 = 16 \cdot 50 = 20 \cdot 40 = 25 \cdot 32 = 32 \cdot 25 = 40 \cdot 20 = 50 \cdot 16 = 80 \cdot 10,$$

stąd d może być równe: 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50 lub 80, a k jest wtedy równe: 810, 816, 820, 825, 832, 840, 850 lub 880,

albo

$$9) 900 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 10 \cdot 90 = 12 \cdot 75 = 15 \cdot 60 = 18 \cdot 50 = 20 \cdot 45 = 25 \cdot 36 = 30 \cdot 30 = 36 \cdot 25 = 45 \cdot 20 = 50 \cdot 18 = 60 \cdot 15 = 75 \cdot 12 = 90 \cdot 10,$$

stąd d może być równe: 10, 12, 15, 18, 20, 25, 30, 36, 45, 50, 60, 75 lub 90, a k jest wtedy równe: 910, 912, 915, 918, 920, 925, 930, 936, 945, 950, 960, 975 lub 990.

Odp.: Kuba napisał na kartce jedną z **69** następujących liczb: 110 lub 120 lub 125 lub 150 lub 210 lub 220 lub 225 lub 240 lub 250 lub 310 lub 312 lub 315 lub 320 lub 325 lub 330 lub 350 lub 360 lub 375 lub 410 lub 416 lub 420 lub 425 lub 440 lub 450 lub 480 lub 510 lub 520 lub 525 lub 550 lub 610 lub 612 lub 615 lub 620 lub 624 lub 625 lub 630 lub 640 lub 650 lub 660 lub 675 lub 710 lub 714 lub 720 lub 725 lub 728 lub 735 lub 750 lub 770 lub 810 lub 816 lub 820 lub 825 lub 832 lub 840 lub 850 lub 880 lub 910 lub 912 lub 915 lub 918 lub 920 lub 925 lub 930 lub 936 lub 945 lub 950 lub 960 lub 975 lub 990.

Przykładowe rozwiązania zadań z klasy II gimnazjum – PIKOMAT 2009

Zadanie 4 (etap II)

W zapisie

$$a + 4 \cdot \overline{bbbb} = \overline{abbbb}$$

zastąp a i b cyframi, aby otrzymać równość prawdziwą.

Autor rozwiązania: **Anna Tokarska**, Gimnazjum Nr 1 w Zespole Szkół
Ogólnokształcących w Zabrze

Rozwiązanie:

Zapis np. \overline{abcd} oznacza liczbę czterocyfrową, gdzie a, b, c, d są dowolnymi cyframi. Zachodzi pytanie, czy można przyjąć, że $a = 0$? W literaturze nie ma jednoznaczności na ten temat. Przykładowo: Lev Kourliandtchik dopuszcza tę możliwość, a Witold Bednarek nie. Przyjmuję najpierw, że $a \neq 0$, a przypadek $a = 0$ rozważę oddzielnie. Zadanie można rozwiązać na dwa sposoby.

I sposób

Najpierw rozważę liczbę \overline{bbbb} występującą w danym wyrażeniu po lewej stronie znaku równości. Pod b możemy podstawić 9 cyfr. Po przemnożeniu tej liczby przez 4 i dodaniu jednej liczby jednocyfrowej mamy otrzymać liczbę pięciocyfrową, której pierwszą cyfrą będzie właśnie cyfra liczby jednocyfrowej. Dla ułatwienia, całe rozumowanie przedstawię w tabeli:

b	\overline{bbbb}	$4 \cdot \overline{bbbb}$	$4 \cdot \overline{bbbb} + a$ (a – pierwsza cyfra liczby po przemnożeniu)	Czy jest spełniony warunek zadania?	Odpowiedź
1	1111	4444	$4444 + 4 = 4448$	nie	-
2	2222	8888	$8888 + 8 = 8896$	nie	-
3	3333	13332	$13332 + 1 = 13333$	tak	$a = 1, b = 3$
4	4444	17776	$17776 + 1 = 17777$	nie	-
5	5555	22220	$22220 + 2 = 22222$	nie	-
6	6666	26664	$26664 + 2 = 26666$	tak	$a = 2, b = 6$
7	7777	31108	$31108 + 3 = 31111$	nie	-
8	8888	35552	$35552 + 3 = 35555$	nie	-
9	9999	39996	$39996 + 3 = 39999$	tak	$a = 3, b = 9$

II sposób

W tej metodzie wykorzystam pełny zapis liczby naturalnej w systemie dziesiętkowym tzn.

np. $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$, gdzie: a, b, c, d należą do $\{0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$.

Zatem równanie: $a + 4 \cdot \overline{bbbb} = \overline{abbbb}$ przyjmie postać:

$$a + 4(1000b + 100b + 10b + b) = 10000a + 1000b + 100b + 10b + b$$

$$a + 4444b = 10000a + 1111b$$

$$3333b = 9999a, \text{ czyli } b = 3a$$

Otrzymaliśmy zależności między cyframi a i b . Podstawię pod a kolejne cyfry, znajdę cyfrę b .

$$a = 1, b = 3$$

$$a = 2, b = 6$$

$$a = 3, b = 9$$

$$a = 4, b = 12 \text{ (12 nie spełnia już warunków zadania)}$$

Sprawdzenie:

$$1) \ a = 1, b = 3$$

$$1 + 4 \cdot 3333 = 13333, \ L = P$$

$$2) \ a = 2, b = 6$$

$$2 + 4 \cdot 6666 = 26666, \ L = P$$

$$3) \ a = 3, b = 9$$

$$3 + 4 \cdot 9999 = 39999, \ L = P$$

Rozwiązanie przypadku $b = 0$

$$a + 4 \cdot \overline{0000} = \overline{a0000}$$

$$a + 0 = a \cdot 10000 + 0 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 0$$

$$a = a \cdot 10000$$

$$9999a = 0$$

$$a = 0$$

Zatem gdyby przyjąć, że b może być równe 0, to a również musiałoby być równe 0 i doszłaby jeszcze jedna para rozwiązań: $a = 0$ i $b = 0$.

Zadanie 2 (etap III)

W pokoju znajdowała się pewna liczba osób. Ich średni wiek był równy liczbie osób znajdujących się w tym pokoju. Gdy do pomieszczenia wszedł 29 letni człowiek, okazało się, że nadal średni wiek był równy liczbie osób w pokoju. Ile osób znajdowało się na początku w pokoju?

Autor rozwiązania: **Katarzyna Ciesielska**, Gimnazjum Nr 1 w Lesznie

Rozwiązanie:

Dane:

- w pokoju znajdowała się pewna liczba osób,
- ich średni wiek był równy liczbie osób znajdujących się w tym pokoju,
- gdy do pomieszczenia wszedł 29-letni człowiek, okazało się, że nadal średni wiek był równy liczbie osób będących w pokoju.

Szukane:

Ile osób było na początku w pokoju?

I sposób

Oznaczam:

x – liczba osób będących na początku w pokoju,
 y – suma ich lat.

Zatem ich średni wiek wynosi $\frac{y}{x}$. Jeśli do pokoju wejdzie jeszcze jeden 29-letni człowiek, wtedy liczba osób w pokoju wyniesie: $(x + 1)$, a suma ich lat wyniesie: $(y + 29)$. Zatem ich średni wiek wyniesie: $\frac{y + 29}{x + 1}$.

W zasadzie zostało podane, że $\frac{y}{x} = x$ (średni wiek osób na początku w pokoju jest równy liczbie osób w pokoju) i $\frac{y + 29}{x + 1} = x + 1$ (średni wiek osób w pokoju po wejściu 29-letniego człowieka jest równy liczbie osób w pokoju).

Rozwiązanie równania $\frac{y}{x} = x$, czyli $y = x^2$ podstawiam do równania: $\frac{y + 29}{x + 1} = x + 1$ i otrzymuję:

$$\frac{x^2 + 29}{x + 1} = x + 1$$

$$x^2 + 29 = (x + 1)(x + 1)$$

$$x^2 + 29 = (x + 1)^2$$

$$x^2 + 29 = x^2 + 2x + 1$$

$$2x = 28$$

$$x = 14 - \text{liczba osób będących w pokoju na początku}$$

Sprawdzenie:

$$L = \frac{14^2 + 29}{14 + 1} = \frac{169 + 29}{15} = \frac{225}{15} = 15$$

$$P = 14 + 1 = 15$$

$$L = P$$

Odp.: Na początku w pokoju było 14 osób.

II sposób

Oznaczam:

x_1 – liczba osób znajdujących się na początku w pokoju,

x_2 – średni wiek tych osób,
 $x_1 = x_2 = x$, czyli $x = x_1$ oraz $x = x_2$.

Po wejściu 29-letniego człowieka do pokoju, ilość osób zwiększyła się o 1. Jeśli średni wiek tych osób jest równy ich liczbie, to po wejściu 29-letniego człowieka, średni wiek wyniesie $x + 1$. W związku z tym, że do pokoju weszła 1 osoba, średnia wieku podniesie się o 1. Dlatego 29-letnia osoba musi „oddać” każdej osobie znajdującej się w pokoju 1 rok, czyli odejmie sobie x lat. Jeśli 29-letni człowiek oddał każdemu rok, aby dopełnić do naszej średnie, jemu samemu musi pozostać tyle lat, ile wynosi nowa średnia, czyli $29 - x$.
Rozwiązuję równanie:

$$\begin{aligned}29 - x &= x + 1 \\2x &= 28 \\x &= 14\end{aligned}$$

Odp.: Na początku w pokoju było 14 osób.

Przykładowe rozwiązania zadań z klasy III gimnazjum – PIKOMAT 2009

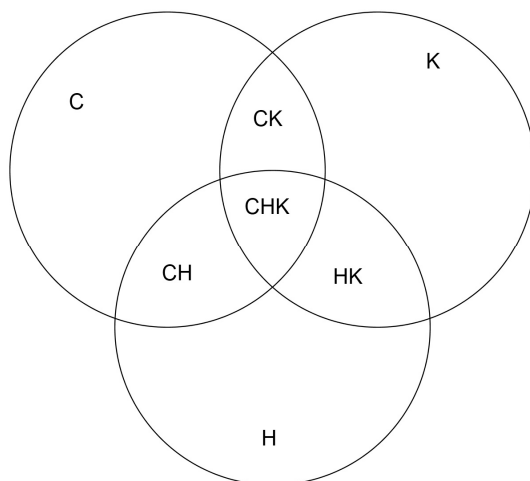
Zadanie 4 (etap III)

W pewnej grupie przyjaciół 21 osób pije kawę, 21 osób pije herbatę i 21 osób pije czekoladę. Wszystkich przyjaciół można podzielić, jeśli chodzi o ich ulubione napoje, na 7 różnych grup. Pierwsze trzy grupy, to ci, którzy piją tylko jeden napój. Następne trzy grupy, to ci, którzy piją dwa spośród trzech napojów. Ostatnia, siódma grupa, to ci, którzy piją wszystkie trzy napoje. Każda z tych 7 grup ma inną liczebność. Najliczniejsza grupa, to ci, którzy piją tylko herbatę, najmniej liczna grupa liczy tylko 3 osoby. Ile osób spośród pijących kawę pije także czekoladę?

Autor rozwiązania: **Kinga Turlej**, Gimnazjum Dwujęzyczne w Akademickim Zespole Szkół Ogólnokształcących w Chorzowie

Rozwiązanie:

Sytuację przedstawioną w zadaniu można przedstawić na rysunku obrazującym 7 grup przyjaciół.



Oznaczam odpowiednio:

C – pijący wyłącznie czekoladę,

CK – pijący czekoladę i kawę,

CHK – pijący wszystkie trzy napoje itd.

Najmniejszą grupą musi być CHK. Przeprowadzam dowód nie wprost. Gdyby tak nie było, to istniałoby koło na rysunku (zbiór czterech grup osób „połączonych jednym napojem”), w którym nie znajduje się grupa trzyosobowa. Najmniejsza liczebność takich czterech grup (osób pijących jeden z napojów) musiałaby wynosić: $4 + 5 + 6 + 7 = 22 > 21$. Jest to sprzeczne z pierwszym zdaniem zadania. A zatem CHK = 3.

Analizuję koło obejmujące pijących herbatę. $H + CH + CHK + HK = 21$, czyli $H + CH + HK = 18$. Dodatkowo H jest największą z liczb określającą liczbę osób w grupie. Ponieważ $CH + HK$ nie może być mniejsze niż $4 + 5 = 9$, to H nie może być większe niż 9. Z drugiej strony, ze względu na różniczność grup, H nie może być mniejsze od 9. Stąd H = 9.

Spośród CH i HK jedna liczba musi być równa 4, druga zaś 5. Bez szkody dla ogólności rozważań zakładam $CH = 4$, $HK = 5$ (przyjęcie $CH = 5$, $HK = 4$ prowadzi do identycznego wyniku ze względu na symetrię).

Wiedząc, że liczebności grup są różne, C, CK, K przyjmują wartości ze zbioru {6, 7, 8}. Prawdziwe są zależności:

$$C + CK + CH + CHK = 21 \text{ oraz } K + CK + HK + CHK = 21$$

$$C + CK + 4 + 3 = 21 \qquad K + CK + 5 + 3 = 21$$

$$C + CK = 14 \qquad K + CK = 13$$

Jedynym rozwiązaniem takiego układu jest:

$$C = 8, \quad CK = 6, \quad K = 7,$$

$$\text{a zatem } CK + CHK = 6 + 3 = 9.$$

Odp.: Spośród pijących kawę, czekoladę pije 9 osób (jest to suma liczebności dwóch grup: pijących wyłącznie kawę i czekoladę oraz pijących wszystkie trzy napoje).

Zadanie 4 (etap II)

Dana jest liczba trzycyfrowa **a**. Tworzymy nową liczbę trzycyfrową **b**, zastępując każdą cyfrę liczby **a** cyfrą dopełniającą do dziesiątki (np. jeśli $a = 103$, to $b = 896$). Następnie piszemy te liczby jedna za drugą, najpierw **b**, potem **a** – powstaje liczba sześciocyfrowa (w naszym przykładzie 896103). Wykaż, że otrzymana w ten sposób liczba sześciocyfrowa dzieli się przez 37.

Autor rozwiązania: **Agata Łaszczuk**, Gimnazjum Nr 126 z Oddziałami Integracyjnymi w Warszawie

Rozwiązanie:

Dane:

x – cyfra setek w liczbie a,

y – cyfra dziesiątek w liczbie a,

z – cyfra jedności w liczbie a,

$$a = 100x + 10y + z,$$

(9 – x) – cyfra setek w liczbie b,

$(9 - y)$ – cyfra dziesiątek w liczbie b ,

$(9 - z)$ – cyfra jedności w liczbie b .

$$b = 100(9 - x) + 10(9 - y) + 9 - z$$

$$b = 900 - 100x + 90 - 10y + 9 - z$$

$$b = 999 - 100x - 10y - z$$

$$c = 1000b + a$$

$$c = 1000(999 - 100x - 10y - z) + 100x + 10y + z$$

$$c = 999000 - 100000x - 10000y - 1000z + 100x + 10y + z$$

$$c = 999000 - 99900x - 9990y - 999z$$

$$c = 999(1000 - 100x - 10y - z)$$

Liczbę 999 można przedstawić jako iloczyn liczb 27 i 37:

$$999 = 27 \cdot 37$$

$$c = 27 \cdot 37(1000 - 100x - 10y - z)$$

W związku z powyższym liczba c jest podzielna przez 37.